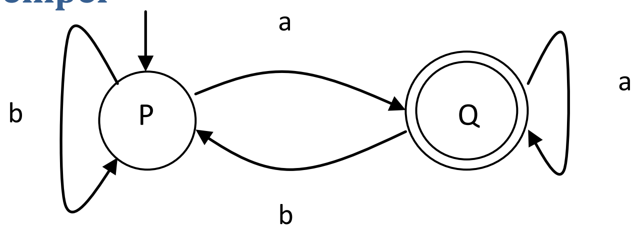
Uke 42

Vi skal her vise hvordan vi kan utvide sekventkalkyle til å simulere beregninger. Vi gjør det her for en enkel automat – men metoden er generell og kan gjøres for allmenne beregninger.

Eksempel



Språk til eksempelet

- Λ : U
- α : $U \to U$
- β : $U \to U$
- P : $U \to BOOL$
- Q : $U \to BOOL$

Først har vi en konstant og to unære funksjoner til å beskrive stringer i alfabetet {a,b}. Oversettelsen til språket er enkelt. Vi skriver stringen abba som $\alpha\beta\beta\alpha\Lambda$. Med parenteser skulle vi ha skrevet $\alpha(\beta(\beta(\alpha(\Lambda))))$ - men siden vi har bare konstanter og unære funksjoner kan vi kutte ut parentesene.

Deretter har vi to unære predikat P og Q - disse bruker vi til å si noe om forbindelse mellom stringer og tilstandene i automaten.

La oss uttrykke at stringen abba blir akseptert. Da har vi tre utsagn:

START : $P(\alpha\beta\beta\alpha\Lambda)$

TRANS : $\forall x(P(\alpha x) \to Q(x)) \land \forall x(P(\beta x) \to P(x)) \land \forall x(Q(\alpha x) \to Q(x)) \land \forall x(Q(\beta x) \to P(x))$

FINAL : $Q(\Lambda)$

Som settes sammen slik

$$\text{START} \land \text{TRANS} \to \text{FINAL}$$

Denne oversettelsen er generell. Med større automater får vi

- For hvert symbol – en unær funksjon
- For hver tilstand – et unært predikat
- For hver transisjon (pil) – et konjunkt av formen over i TRANS
- Med flere aksepterende tilstander – disjunksjon av dem i FINAL

Kalkyle til eksempelet

Vi skal vise at stringen abba blir akseptert hvis og bare hvis utsagnet START $\wedge$ TRANS $\rightarrow$ FINAL er gyldig. Vi har til nå lært sekventkalkyle for utsagnslogikk. Vi må vise hvordan vi kan lage en sekventkalkyle som også behandler $\forall$-kvantor i antesedenten (det viser seg at det er det som trengs for eksempelet). Her er regelen:

$\forall$-antesedent:
$$\frac{\Gamma, \forall x(F(x)), F(t) \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x(F(x)) \vdash \Delta}$$

Her er t en term (bygd opp av funksjoner, konstanter og variable) . Se på analysetolkingen. Anta at vi har en tolkning som falsifiserer konklusjonen – samtlige utsagn i antesedenten blir sanne og samtlige utsagn i suksedenten usanne. Spesielt blir $\forall x(F(x))$ sann - F skal være sann for samtlige x. I premisset er det angitt en term t som F skal være sann for. Senere kan vi ta andre termer – og for å være klar til dem så må vi være klar til å analysere $\forall x(F(x))$ flere ganger. Vi sier at $\forall x(F(x))$ er et kritisk utsagn – det er et utsagn som ikke forsvinner ved analysen.

Vi kan gi et bevis for utsagnet. Jeg tar med de første linjene i beviset.

$$\bullet \qquad\qquad\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots..$$
$$\underline{P(\alpha\beta\beta\alpha\Lambda)\ ,\ Q(\beta\beta\alpha\Lambda)\ , \mathrm{TRANS} \vdash Q(\beta\beta\alpha\Lambda)\ , Q(\Lambda)} \quad \underline{P(\alpha\beta\beta\alpha\Lambda)\ ,\ Q(\beta\beta\alpha\Lambda)\ , P(\beta\alpha\Lambda)\ , \mathrm{TRANS} \vdash Q(\Lambda)}$$
$$\bullet \qquad \underline{P(\alpha\beta\beta\alpha\Lambda)\ ,\ Q(\beta\beta\alpha\Lambda)\ , Q(\beta\beta\alpha\Lambda) \rightarrow P(\beta\alpha\Lambda)\ , \mathrm{TRANS} \vdash Q(\Lambda)}$$
$$\underline{P(\alpha\beta\beta\alpha\Lambda), \mathrm{TRANS} \vdash P(\alpha\beta\beta\alpha\Lambda),\ Q(\Lambda) \qquad\qquad P(\alpha\beta\beta\alpha\Lambda)\ ,\ Q(\beta\beta\alpha\Lambda)\ , \mathrm{TRANS} \vdash Q(\Lambda)}$$
$$\underline{P(\alpha\beta\beta\alpha\Lambda)\ ,\ P(\alpha\beta\beta\alpha\Lambda) \rightarrow Q(\beta\beta\alpha\Lambda)\ , \mathrm{TRANS} \vdash Q(\Lambda)}$$
$$\underline{P(\alpha\beta\beta\alpha\Lambda)\ ,\ \mathrm{TRANS} \vdash Q(\Lambda)}$$
$$\vdash P(\alpha\beta\beta\alpha\Lambda) \wedge \mathrm{TRANS} \rightarrow Q(\Lambda)$$

Falsifikasjon ved ikke akseptering

Anta at vi har en string som ikke blir akseptert. Det kan for eksempel være stringen abb. Ved å bruke automaten kan vi gi en falsifikasjon av det tilhørende utsagnet

$$P(\alpha\beta\beta\Lambda) \wedge \mathrm{TRANS} \rightarrow \mathrm{FINAL}$$

- Universet består av alle stringer og Λ, α, β tolkes på opplagt måte
- For predikatene tar vi som sant alt som kan nåes ved å bruke stringen – dvs følgende er sant $P(\alpha\beta\beta\Lambda)$, $Q(\beta\beta\Lambda)$, $P(\beta\Lambda)$,$P(\Lambda)$. For alt annet er predikatene usanne.
- Med denne tolkningen får vi utsagnet falsifisert.

Generalisering

Metoden her går like bra for PDA'er. Den eneste forskjellen er at vi må til enhver tilstand ha et binært predikat – en string for inputstringen og en string for stakken. Senere skal vi se at det også går for Turing maskiner.